НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.

ЛЕКЦИЯ 12

6.7 Пример исследования устойчивости системы вторым методом Ляпунова

Пример 6.7.1

Исследовать устойчивость положения равновесия $x = 0$ системы, которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 \end{aligned} . \tag{6.21}$$

С ходу нельзя сказать, устойчива эта система или нет.

Решение. Производим решение по пунктам метода Ляпунова.

1) Уравнения уже представлены в нормальной форме.

2) Функцию Ляпунова будем искать в виде квадратичной формы общего вида от двух переменных, то есть используем четвертый метод (метод Красовского). Мы уже получали такую форму (см. (6.11)). С учетом симметрии Q эта квадратичная форма имеет вид.

$$V(x) = x^T Q x = [x_1 x_2] \begin{bmatrix} 1 & q_1 \\ q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 2q_1 x_1 x_2 + q_2 x_2^2 . \tag{6.22}$$

где q_1, q_2 – коэффициенты.

В матрице Q в (6.22) верхний левый коэффициент сразу принят равным единице, поскольку общий множитель матрицы на решение не влияет.

Согласно критерию Сильвестра эта форма будет положительно определенной функцией, если выполняется неравенство

$$\Delta_2 = q_2 - q_1^2 > 0. \tag{6.23}$$

3) Составляем выражение для производной функции Ляпунова $\frac{dV}{dt} = W(x)$ в силу системы (6.21).

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = \frac{\partial(x_1^2 + 2q_1 x_1 x_2 + q_2 x_2^2)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial(x_1^2 + 2q_1 x_1 x_2 + q_2 x_2^2)}{\partial x_2}(-x_1) = \\ (2x_1 + 2q_1 x_2)x_2 - (2q_1 x_1 + 2q_2 x_2)x_1 ,$$

или

$$\frac{dV(x)}{dt} = 2x_1 x_2 + 2q_1 x_2^2 - 2q_1 x_1^2 - 2q_2 x_1 x_2 = 2x_1 x_2 (1 - q_2) + 2q_1 (x_2^2 - x_1^2) . \tag{6.24}$$

Отметим, что правая часть исходного уравнения приведена к виду, удобному для выбора q_1 и q_2. Из (6.24) видно, что нам удобно принять $q_1 = 0$, $q_2 = 1$ и это не противоречит условию (6.23), при этом в правой части (6.24) зануляются оба слагаемые. Запишем квадратичную форму (6.22) и ее производную по (6.24) при $q_1 = 0$, $q_2 = 1$:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2,\ \ \frac{dV(x)}{dt} = 2x_1x_2(1-1) + 2\cdot 0\cdot(x_2^2 - x_1^2) = 0\,.$$

Таким образом $V(x)$ по своему виду, а также согласно (6.23) будет положительно определенной, а ее производная в силу уравнений системы $\frac{dV(x)}{dt}$ равна нулю, то есть знакопостоянная. Следовательно, положение равновесия $x = 0$ системы (6.21) устойчиво по Ляпунову.

Пример 6.7.2

Исследовать устойчивость положения равновесия $x = 0$ системы, которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 \end{aligned}\ . \qquad (6.25)$$

Вообще-то по виду системы (6.25) сразу видно, что она асимптотически устойчива (она линейная и распадается на две простейшие независимых системы с отрицательными правыми частями), но докажем это, используя второй метод Ляпунова.

Решение.

Пункты 1 и 2 аналогичны примеру 6.7.1.

3) Составляем выражение для производной функции Ляпунова $\frac{dV}{dt} = W(x)$ в силу системы (6.25).

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = \frac{\partial(x_1^2 + 2q_1x_1x_2 + q_2x_2^2)}{\partial x_1}(-x_1) + \frac{\partial(x_1^2 + 2q_1x_1x_2 + q_2x_2^2)}{\partial x_2}(-x_2) = ,$$
$$-\left(2x_1 + 2q_1x_2\right)x_1 - \left(2q_1x_1 + 2q_2x_2\right)x_2$$

или

$$\frac{dV(x)}{dt} = -2x_1^2 - 2q_1x_2x_1 - 2q_1x_1x_2 - 2q_2x_2^2 = -2x_1^2 - 2q_2x_2^2 - 4q_1x_1x_2\,. \qquad (6.27)$$

Примем $q_1 = 0$, $q_2 > 0$. Тогда квадратичная форма (6.22) и ее производная по (6.27)

$$V(x) = x_1^2 + q_2x_2^2,\ \ \frac{dV(x)}{dt} = -2x_1^2 - 2q_2x_2^2 < 0,$$

то есть квадратичная форма положительно определенная, а ее производная в силу уравнений системы (6.25) больше нуля, то есть отрицательно определенная. Следовательно, как и следовало ожидать, положение равновесия $x = 0$ системы (6.25) асимптотически устойчиво.

Из рассмотренных примеров видно, что исследование устойчивости системы вторым методом Ляпунова даже для простых систем требует определенных навыков.

6.8 Исследование устойчивости линейных и линеаризованных систем прямым методом Ляпунова

Мы уже говорили о том, что недостатком прямого метода Ляпунова является то, что этот метод не предлагает процедуры выбора функции Ляпунова. Однако для линейных и линеаризованных систем этот недостаток устранен. Кроме того, для этих систем второй метод Ляпунова дает не только достаточные, но и необходимые условия устойчивости. Рассмотрим это. Рассмотрим автономную линейную систему (см. (6.15))

$$\dot{x} = Ax \ , \tag{6.28}$$

где $x = [x_1 x_2 ... x_n]^T$, A – квадратная матрица *n*-го порядка, с положением равновесия (с особой точкой) $x = 0$.

В качестве претендента на функцию Ляпунова выберем квадратичную форму (см. (6.7))

$$V(x) = x^T Px \, , \tag{6.29}$$

где $P = P^T$ – квадратная симметрическая матрица коэффициентов *n*-го порядка.

Теперь согласно прямому методу Ляпунова нам нужно найти полную производную функции $V(x)$ в силу системы (6.28). Чтобы не усложнять себе жизнь выяснением правил дифференцирования квадратичной формы, мы просто определим производную $V(x)$ по времени, как производную от сложной функции $x^T Px$ и затем подставим в нее из (6.28) $\dot{x} = Ax$. В итоге получим:

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{d(x^T Px)}{dt} = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} = x^T A^T Px + x^T PAx = x^T \left(A^T P + PA\right)x \, . \tag{6.30}$$

Таким образом, мы для $\frac{dV(x)}{dt}$ вновь получили квадратичную форму, но уже с другой матрицей коэффициентов: $A^T P + PA$. Обозначим эту матрицу через $-Q$

$$A^T P + PA = -Q \tag{6.31}$$

Уравнение (6.31) *называется уравнением Ляпунова*. С учетом (6.31) выражение для $\frac{dV(x)}{dt}$ (6.30) принимает вид

$$\frac{dV(x)}{dt} = -x^T Qx \, . \tag{6.32}$$

Из (6.32) следует, что чтобы система (6.28) была асимптотически устойчивой, нужно, чтобы при $P > 0$ было $Q > 0$ [3].

Как использовать полученный результат для исследования устойчивости (6.28)? Ответ очень простой: Нужно задаться матрицей $Q > 0$ и решить уравнение (6.31) относительно P. Если решение есть и в результате решения получим $P > 0$, то система (6.28) устойчивая.

Справедлива следующая теорема [3]:

Для того, чтобы система (6.28) была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы для любой матрицы $Q > 0$ найдется решение $P > 0$ уравнения Ляпунова (6.31).

Полученный результат позволяет не только исследовать устойчивость линейных и линеаризованных систем, но и выполнять их синтез [3, 4]. В частности, легко можно получить необходимое и достаточное условие получения заданной степени устойчивости динамической системы [3]. При этом можно изменить коэффициенты матрицы A так, чтобы была достигнута эта степень устойчивости.

Преимуществом рассмотренного подхода является то, что прямой метод Ляпунова годится для анализа устойчивости и синтеза многомерных (MIMO) динамических систем. Напомним, что «классические» методы применимы в основном для одномерных (SISO) систем.